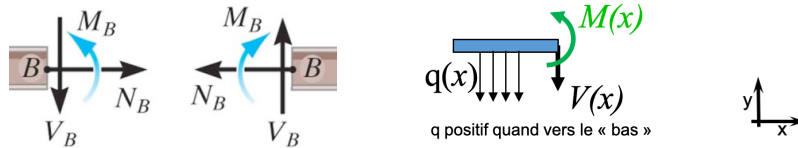


Poutres

Force de Cisaillement, Moment de flexion



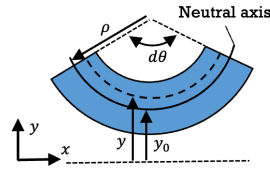
$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -q(x)$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial x} = V(x)$$

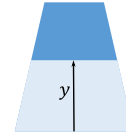
$$M(x) = -\iint q(x)$$

$$\Delta V(x = x_i) = F_i$$

Axe Neutre, Contraintes.



$$\epsilon_x(x, y) = -\frac{y - y_0}{\rho}$$



$$y_0 = \frac{\int_A y \, dy \, dz}{A}$$

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}}(y - y_0)$$

$$|\sigma_{x, \max}(x)| = \frac{|M_z(x)|}{I_{z,y_0}} c = \frac{|M_z(x)|}{S}$$

c: Distance maximale entre surface de la poutre et l'axe neutre

$$y_0 = \frac{\int_A E(y) y \, dy \, dz}{\int_A E(y) \, dy \, dz}$$

pour poutre Composite

$$I_{z,y_0} = \int_A (y - y_0)^2 \, dA$$

$$\langle EI_{z,y_0} \rangle = \int_A E(y) (y - y_0)^2 \, dA = \sum_i E_i I_{z,y_{0,i}}$$

$$\sigma_{x,i} = E_i \epsilon_x = -E_i \frac{y - y_0}{\rho} \text{ pour poutre composite}$$

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{E(y) M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0} \rangle} (y - y_0) = E(y) \epsilon_x(x, y)$$

$$I_{z,y_0} = \sum_{i=1}^N I_{z,y_i} + \sum_{i=1}^N A_i (y_i - y_0)^2 \quad (\text{Steiner})$$

y_i est le centroïde de l'élément i, par rapport à l'origine

I_{z,y_i} est le moment d'inertie de l'élément i, pour « plier » par l'axe qui passe par son centroïde

Position axe neutre avec force axiale

$$y'_0 = \frac{F}{M_z(x)} \frac{I_{z,y_0}}{A} + y_0$$

Flèche - méthode différentielle

$$\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

$$\frac{\partial^3 w(x)}{\partial x^3} = \frac{V(x)}{EI}$$

$$\frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} = -\frac{q(x)}{EI}$$

$$w'(x) = \int \frac{M(x)}{EI} \, dx$$

$$w(x) = \int w'(x) \, dx$$

Flambage

(a) Pinned-pinned column	(b) Fixed-free column	(c) Fixed-fixed column	(d) Fixed-pinned column
$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{2.046 \pi^2 EI}{L^2}$
$L_e = L$	$L_e = 2L$	$L_e = 0.5L$	$L_e = 0.699L$

Pour une force selon x, la poutre peut fléchir selon y ou selon z. C'est autour de l'axe avec le plus petit moment d'inertie qu'il y aura flambage.

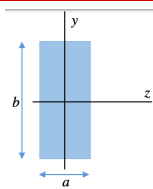
$$F_{crit} = \left(\frac{n\pi}{L_{eff}} \right)^2 EI$$

$$w(x) = A \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x \right)$$

$$\sigma_{crit} = \pi^2 E \left(\frac{r}{L_{eff}} \right)^2 \quad r^2 = \frac{I}{A} = \text{rayon de giration}$$

Moments d'inerties utiles

section rectangulaire: $I_{z,y_0} = \frac{ab^3}{12}$

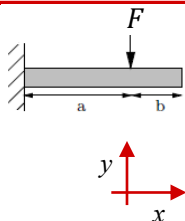


section circulaire, axe par centroïde

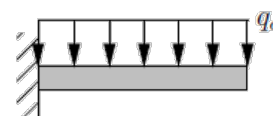
$$: I_p = \frac{\pi r^4}{4}$$

Quelques exemples de charges et de flexion

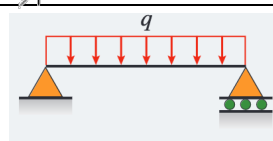
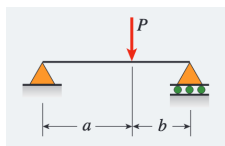
$$w(x) = \begin{cases} -\frac{Fa^3}{6EI} \left(3 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{x}{a} \right)^3 \right); & x \leq a \\ -\frac{Fa^3}{6EI} \left(3 \left(\frac{x}{a} \right) - 1 \right); & x > a \end{cases}$$



$$w(x) = -\frac{q_0 L^4}{24EI} \left(6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \left(\frac{x}{L} \right)^4 \right)$$



$$w(x) = \begin{cases} -\frac{P b x}{6LEI} (L^2 - b^2 - x^2); & x \leq a \\ -\frac{Pa(L-x)}{6LEI} (2Lx - a^2 - x^2) & x > a \end{cases}$$



$$w(x) = -\frac{q x}{24EI} (L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$